Examen Final

Algoritmos y Estructuras de Datos III

26 de febrero de 2021

Para aprobar el final es necesario tener al menos dos ejercicios correctos. Todos los ejercicios deben estar justificados de acuerdo a lo visto en la materia.

Ejercicio 1

Dado un digrafo pesado D, definimos la distancia elemental $d^*(v, w)$ entre dos vértices v y w como el mínimo de entre todos los pesos de los caminos **simples** que van de v a w. Si w no es alcanzable desde v, entonces $d^*(v, w) = \infty$. El problema de camino mínimo elemental desde un vértice v consiste en encontrar un vector d de n posiciones tal que $d(w) = d^*(v, w)$ para todo $w \in V(D)$.

Diseñar un algoritmo basado en programación dinámica para resolver el problema de camino mínimo elemental para digrafos acíclicos. Explicar claramente por qué el algoritmo diseñado es un algoritmo de programación dinámica, discutiendo cómo se produce la superposición de subproblemas y cuál es la estructura de memoización.

Ejercicio 2

El *ancho de banda* $\mathrm{bwd}(C)$ de un camino C en un grafo pesado G es el peso de la arista menos pesada de C. El *ancho de banda* $\mathrm{bwd}_G(v, w)$ entre dos vértices v y w es el máximo ancho de banda de entre todos los caminos que unen a v con w. Sea G un grafo conexo. Demostrar que T es un árbol generador máximo de G si y solo si $\mathrm{bwd}_T(v, w) = \mathrm{bwd}_G(v, w)$ para todo $v, w \in V(G)$.

Ejercicio 3

Recordar que un grafo es *mixto* cuanto tiene aristas orientadas y aristas no orientadas. Al orientar todas las aristas de un grafo mixto G se obtiene un digrafo D. Recordar que D es euleriano si y solo si G es conexo y $d_D^{in}(v) = d_D^{out}(v)$ para todo $v \in V(D)$.

Diseñar un algoritmo que encuentre una orientación euleriana de un grafo G o informe que G no tiene orientaciones eulerianas. El algoritmo debe estar basado en un modelo de flujo y debe tomar tiempo $O(m^2)$ tiempo, donde m es la cantidad de aristas de G.

Ejercicio 4

Decimos que un grafo G es *clausurado* cuando $d(v) + d(w) < n$ para todo par de vertices v y w que no son adyacentes en G. Demostrar que el siguiente problema es NP-completo:

INPUT: Un grafo G.

OUTPUT: Verdadero si y solo si G es un grafo clausurado y tiene un ciclo hamiltoniano.